

---

## Programme de khôlle n° 25

---

Semaine du 25 Mai

### Cours

#### • Chapitre 14 : Représentation matricielle

- Représentation d'un vecteur  $x$  d'un espace  $E$  muni d'une base  $\mathcal{B}$  par une matrice colonne  $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ .
- Représentation d'une application linéaire  $f$  d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$  muni d'une base  $\mathcal{B}$  vers un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $F$  muni d'une base  $\mathcal{B}'$  par une matrice  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$ .
- Application  $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto A(x)$  canoniquement associée à une matrice  $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ , représentée en colonnes par l'application  $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X \mapsto AX$
- Image et noyau d'une matrice :  $\text{Ker}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}), AX = 0\}$  et  $\text{Im}(A) = \{AX, X \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})\}$
- $\text{Im}(A) = \text{Vect}(C_1, \dots, C_m)$  où  $C_1, \dots, C_m$  sont les colonnes de  $A$
- $f$  est injective (resp. surjective) si et seulement si sa matrice représentative dans des bases quelconques a ses colonnes libres (resp. génératrices de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ )
- Opérations : matrice d'une somme d'applications linéaires, matrice d'une composée, matrice de  $f^n$ , matrice de  $f^{-1}$ .
- Changement de base : matrice de passage, formules de changement de base pour une application linéaire (de  $\mathcal{E}, \mathcal{F}$  à  $\mathcal{E}', \mathcal{F}'$ ) et pour un endomorphisme (de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$ ).
- Matrices équivalentes, matrices semblables
- Trace d'un endomorphisme
- Rang :  $\text{rg}(A) = \dim(\text{Im}(A))$ , cette nouvelle définition coïncide avec la précédente (nombre de lignes non nulles dans une forme échelonnée de  $A$ ).

Si  $P$  est inversible,  $\text{rg}(A) = \text{rg}(PA) = \text{rg}(AP)$

- $A$  est de rang  $r$  si et seulement si elle est équivalente à la matrice  $J_r = \left( \begin{array}{c|c} I_r & 0_{r,m-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & 0_{n-r,m-r} \end{array} \right)$
- Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.
- Rang d'une famille de vecteurs.
- Explication du pivot de Gauss en terme de multiplication par des matrices inversibles.
- Théorème du rang pour les matrices

### Questions de cours :

- Si  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ ,  $\mathcal{B}$  base de  $E$ ,  $\mathcal{B}'$  base de  $F$  et  $\mathcal{B}''$  base de  $G$ , alors  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}''}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}''}(g) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$
- $f$  est injective si et seulement si les colonnes de la matrice représentative de  $f$  dans des bases quelconques forment une famille libre de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$
- Si  $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$  et  $B \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$ , alors  $\text{rg}(AB) \leq \min(\text{rg}(A), \text{rg}(B))$ .